

数值流形法在处理强奇异性问题时的网格无关性

徐栋栋, 郑 宏

(中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071)

摘 要: 数值流形方法 (NMM) 的最大优势在于可以统一地处理岩土力学中的连续和非连续变形问题。它在求解断裂力学问题时无需强制裂纹与数学网格保持一致, 非常适合应用于岩土工程中由连续到非连续的破坏过程模拟。在裂纹扩展过程中, 裂纹与数学网格的相对位置将会是任意的, 如裂纹尖端可能落在网格内部、网格节点上或网格边上等。因此, 对同一条裂纹, 通过旋转和移动数学网格构造了它们之间的这种相对位置关系以及一些可能对计算结果产生影响的极端情况, 并以应力强度因子作为衡量标准, 研究了 NMM 在处理线弹性断裂力学问题时的网格依赖性。研究表明, NMM 即使在处理强奇异性问题时依然有着很好的网格无关性, 进一步证实了它在模拟裂纹扩展问题时的鲁棒性。

关 键 词: 数值流形法; 网格无关性; 奇异性; 应力强度因子; J 积分; 交互积分

中图分类号: TU 4

文献标识码: A

Mesh independence of numerical manifold method in treating strong singularity

XU Dong-dong, ZHENG Hong

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract: One major advantage of the numerical manifold method (NMM) is that it can solve the continuous and discontinuous problems in geomechanics in a unified way. It is not necessary to force the mathematical meshes to match the cracks in the NMM, which is very suitable for the simulation of failure process from continuum to discontinuum in geomechanics. During the crack propagation, the relative position relationships between the cracks and the mathematical meshes will be arbitrary; for example, the crack tip may locate in the interior, on the node or on the edge of the mesh. For the same crack, the mesh independency of NMM in dealing with the linear elastic crack problems is studied by rotating and moving the mathematical meshes to construct the relationships and some extreme cases that may have an influence on the results and taking stress intensity factor as the measurement. The results in this study to the NMM show it has little mesh dependency even in treating strong singularity, implying it will be robust in simulating crack propagation.

Key words: numerical manifold method; mesh independency; singularity; stress intensity factor; J integral; interaction integral

1 引 言

近年来, 对于材料体由连续到非连续的演化过程研究一直备受重视。几种常用的数值方法也已被应用到裂纹扩展问题中。

有限元方法通过在裂纹尖端引入节理单元或接触面单元模拟裂纹问题^[1-2]。但有限元网格必须要与裂纹保持一致, 因此, 前处理非常复杂, 尤其当裂纹发生扩展时便是如此。同样, 位移、应力和应变等映射到新的节点和积分点上也是不可避免的。

无网格方法, 仅需要材料体的几何边界以及一系列的节点, 意味着不再包含单元, 那么也就不存

在裂纹和网格必须保持一致的问题^[3-5]。伽辽金无网格法^[6]使用移动最小二乘插值在模拟裂纹问题时更加有效。但无网格法在数值积分及本质边界条件的施加方面存在困难, 且计算消耗也很高^[7]。

有限元法有很多优良的特性, 但在处理裂纹问题时网格生成又有困难, 因此, 针对它的改进, 发展了广义有限元法^[7-9]和扩展有限元法^[10-13], 它们均在单位分解法 (Partition of Unity Method) 体系下^[14-15]。扩展有限元中, 引入广义 Heaviside 函数和裂纹尖端渐进位移函数, 分别用来模拟裂纹面两侧的不连续性和裂纹尖端附近的应力奇异性。因此, 裂纹不必与有限元网格保持一致, 且裂纹扩展时无需网格重

分。在广义有限元法中,可以任意选择局部位移逼近函数的阶次,从而增加了有限元空间。对于复杂问题,如多裂纹问题,两种方法在定义附加位移函数时将是一个大的挑战。另外没有严格的接触算法也是上述方法的另一个缺陷。

数值流形方法^[16-17],首先由石根华博士提出,基于数学覆盖和物理覆盖,实现了对连续和非连续问题的统一解。数学覆盖由有限元网格生成,物理覆盖是数学覆盖与物理区域的交集。同样,网格无需与材料体的内外边界保持一致,因此,前处理更为简单且无需网格重分。它在模拟裂纹两侧的不连续性时,显得更加自然,因为权函数定义在数学覆盖上,而自由度定义在物理覆盖上。再加上从非连续变形分析方法(DDA)中继承下来的接触算法,无疑在处理裂纹问题时,数值流形方法(NMM)将是一个更好地选择。有些学者也做了相关研究^[18-20],准确地模拟出了裂纹尖端的应力强度因子,并给出了小变形情况下的裂纹扩展路径。

对于扩展有限元,当不连续面两侧的面积或体积比非常大时,切割出来的单元矩阵是病态的,对网格表现出了极大的依赖性,这是引入的阶跃函数导致的^[21],NMM通过切割出来的流形单元完全避免了该问题。文献[22]在有限覆盖方法中加入广义单元,进行了网格依赖性研究,但只针对不含强奇异性(如裂纹尖端的应力奇异性)的问题展开。

因此,笔者针对强奇异性问题,如裂纹问题,通过旋转数学网格,构造出裂纹与网格的各种不同相对位置关系以及一些可能对计算结果产生影响的极端情况,对NMM的网格依赖性进行研究,由此揭示了NMM的另一个优良特性,即网格无关性。

2 裂纹体控制方程

下面讨论二维线弹性裂纹体的控制方程。

如图1所示, Ω 为裂纹体; Γ 为 Ω 的边界, $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t \cup \Gamma_c$, Γ_u 为位移边界条件, Γ_t 为应力边界条件, Γ_c 为裂纹面, $\Gamma_c = \Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^-$, Γ_c^+ 和 Γ_c^- 分别为裂纹面的上、下表面。

平衡方程和边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= 0 && \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} && \text{在 } \Gamma_t \text{ 上} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{在 } \Gamma_c \text{ 上} \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} && \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{n}$ 为外法向量; $\boldsymbol{\sigma}$ 为柯西应力; $\mathbf{b}$ 为单位体积的体力; $\mathbf{u}$ 为位移矢量; $\bar{\mathbf{t}}$ 和 $\bar{\mathbf{u}}$ 为边界 Γ_t 和 Γ_u 上的力和位移。

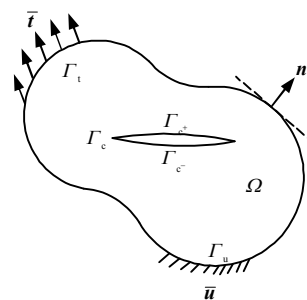


图1 二维线弹性含裂纹体
Fig.1 2D elastic cracked body

3 NMM 简介

NMM 是一种基于“覆盖”的数值方法,包括数学覆盖(MC)和物理覆盖(PC)。它用一系列相互重叠的数字覆盖将整个物理区域覆盖住。数字覆盖与物理边界相互切割生成物理覆盖,物理覆盖之间相互切割生成流形单元。

据图2说明,整个物理区域为 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, Ω_1 和 Ω_2 是两个不同的材料区域,因此,物理边界是由材料分界线以及 Ω 的外边界组成。

如图2所示,正六边形和正方形分别表示两个数字覆盖,记为MC1和MC2;MC1与 Ω 相互切割,生成两个物理覆盖,记为PC11和PC12;MC2与 Ω 相互切割,生成两个物理覆盖,记为PC21和PC22;4个物理覆盖相互切割,生成了6个流形单元:E1源于PC11,E2源于PC11和PC21,E3源于PC21,E4源于PC12,E5源于PC12和PC22,E6源于PC22。

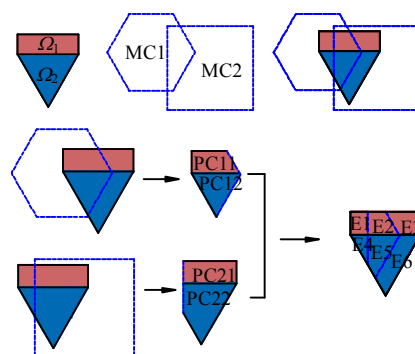


图2 流形单元的生成
Fig.2 Generation of manifold elements

流形单元上的位移函数可表示为

$$\mathbf{u}^m(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N^t} \varphi_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{N^s} \varphi_j(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_j \quad (2)$$

式中: N^t 为传统物理覆盖数; N^s 为奇异物理覆盖数,增加了附加位移函数用来模拟应力奇异性的物理覆盖定义为奇异覆盖; $\varphi_i(\mathbf{x})$ 为第*i*个物理覆盖所

对应的权函数; $u_i(x)$ 为在第 i 个物理覆盖上的位移函数:

$$u_i(x) = P^T(x) \cdot a_i \quad (3)$$

式中: a_i 为自由度; $P^T(x)$ 为多项式基函数, 可以有任意阶次, 文中所述高阶流形元均指如下覆盖位移函数取 1 阶泰勒展开的形式:

$$P^T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{x-x_i}{l_i} & 0 & \frac{y-y_i}{2l_i} & \frac{y-y_i}{2l_i} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{y-y_i}{l_i} & \frac{x-x_i}{2l_i} & \frac{x_i-x}{2l_i} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: (x_i, y_i) 为物理覆盖所对应的插值点的坐标。

为了模拟应力奇异性, 增加了附加位移函数:

$$\hat{u}_j = \Phi \cdot s_j \quad (5)$$

式中: s_j 为附加自由度; Φ 为奇异基函数:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 & \Phi_4 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 & \Phi_4 \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中:

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} & \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} & \sqrt{r} \sin \frac{3\theta}{2} & \sqrt{r} \cos \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix}$$

式中: $\Phi_1, \dots, \Phi_4$ 为裂纹尖端 Williams 位移级数的前 4 项^[23]; (r, θ) 为定义在裂纹尖端的极坐标系。

4 改进的高阶 NMM

根据变分原理, 系统方程表示为

$$Kd = F \quad (7)$$

式中: d 为广义自由度向量; K 和 F 分别为整体刚度矩阵和等效荷载矩阵, 单元刚度矩阵和荷载矩阵为

$$K^e = \begin{bmatrix} k^{a_1 a_1} & k^{a_1 s_1} & k^{a_1 a_2} & k^{a_1 s_2} & k^{a_1 a_3} & k^{a_1 s_3} \\ k^{s_1 a_1} & k^{s_1 s_1} & k^{s_1 a_2} & k^{s_1 s_2} & k^{s_1 a_3} & k^{s_1 s_3} \\ k^{a_2 a_1} & k^{a_2 s_1} & k^{a_2 a_2} & k^{a_2 s_2} & k^{a_2 a_3} & k^{a_2 s_3} \\ k^{s_2 a_1} & k^{s_2 s_1} & k^{s_2 a_2} & k^{s_2 s_2} & k^{s_2 a_3} & k^{s_2 s_3} \\ k^{a_3 a_1} & k^{a_3 s_1} & k^{a_3 a_2} & k^{a_3 s_2} & k^{a_3 a_3} & k^{a_3 s_3} \\ k^{s_3 a_1} & k^{s_3 s_1} & k^{s_3 a_2} & k^{s_3 s_2} & k^{s_3 a_3} & k^{s_3 s_3} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$F^e = \begin{bmatrix} f^{a_1} \\ f^{s_1} \\ f^{a_2} \\ f^{s_2} \\ f^{a_3} \\ f^{s_3} \end{bmatrix}$$

其中:

$$f^{a_i} = \int_{\Gamma_i^e} \varphi_i(x) P(x) \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \varphi_i(x) P(x) b d\Omega + k \int_{\Gamma_u^e} \varphi_i(x) P(x) \bar{u} d\Gamma$$

$$f^{s_i} = \int_{\Gamma_i^e} \varphi_i(x) \Phi^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \varphi_i(x) \Phi^T b d\Omega + k \int_{\Gamma_u^e} \varphi_i(x) \Phi^T \bar{u} d\Gamma$$

$$k^{a_i a_j} = k \int_{\Gamma_u^e} (\varphi_i(x) P(x)) (\varphi_j(x) \cdot P^T(x)) d\Gamma + \int_{\Omega} (B^{a_i})^T D B^{a_j} d\Omega$$

$$k^{a_i s_j} = k \int_{\Gamma_u^e} (\varphi_i(x) P(x)) (\varphi_j(x) \cdot \Phi) d\Gamma + \int_{\Omega} (B^{a_i})^T D B^{s_j} d\Omega$$

$$k^{s_i a_j} = k \int_{\Gamma_u^e} (\varphi_i(x) \Phi^T) (\varphi_j(x) \cdot P^T(x)) d\Gamma + \int_{\Omega} (B^{s_i})^T D B^{a_j} d\Omega$$

$$k^{s_i s_j} = k \int_{\Gamma_u^e} (\varphi_i(x) \Phi^T) (\varphi_j(x) \cdot \Phi) d\Gamma + \int_{\Omega} (B^{s_i})^T D B^{s_j} d\Omega$$

$$B^{a_i} = B(\varphi_i(x) \cdot P^T(x))$$

$$B^{s_i} = B(\varphi_i(x) \cdot \Phi)$$

B 为应变矩阵

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (9)$$

D 为弹性矩阵, 对平面应力或平面应变问题可表示为

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

或

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/[2(1-\nu)] \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中: E 为弹性模量; ν 为泊松比。

5 奇异物理覆盖的布置

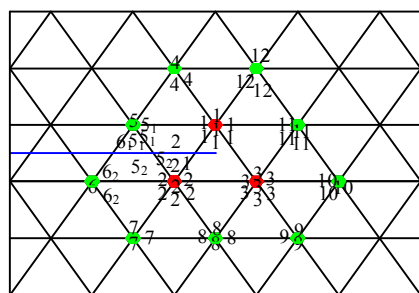
裂纹扩展时, 可能出现 3 种情况: ①裂纹尖端

刚好落在单元内部；②裂纹尖端落在单元边上；③裂纹尖端落在单元节点上。根据不同的情况，奇异覆盖的布置如下：

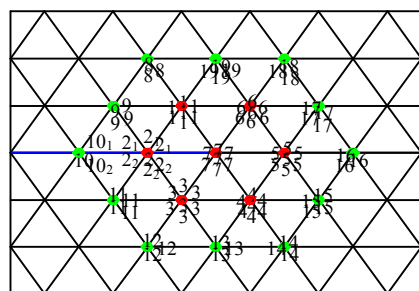
在图 3(a)中，裂纹尖端落在流形单元内部，所以只有 1 个奇异单元和 14 个混合单元；PC1、PC2 和 PC3 表示奇异物理覆盖。奇异单元由 PC1、PC2 和 PC3 覆盖。混合流形单元至少有 1 个奇异覆盖。

在图 3(b)中，裂纹尖端刚好落在数学网格节点上，因此，共用此节点的 6 个流形单元为奇异单元，周围 18 个为混合单元。PC1、PC2₁、PC2₂、PC3、PC4、PC5、PC6 和 PC7 表示奇异物理覆盖。奇异流形单元含 3 个奇异物理覆盖，同样混合单元含至少一个奇异物理覆盖。

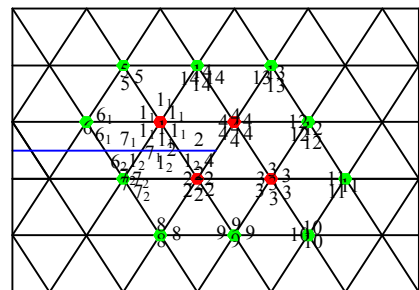
在图 3(c)中，裂纹尖端刚好落在数学网格边上。3 个流形单元共用它为节点，视为奇异单元，周围 16 个为混合单元。PC1₁、PC1₂、PC2、PC3 和 PC4 表示奇异物理覆盖。



(a) 裂纹尖端落在流形单元内部



(b) 裂纹尖端落在数学网格节点上



(c) 裂纹尖端落在网格边上

注：黑色和灰色小区域中的数字表示数学覆盖节点编号；流形单元内部的数字表示物理覆盖编号。

图 3 裂纹与数学网格切割的 3 种基本情况

Fig.3 Three cases of crack intersecting

with mathematical cover

6 应力强度因子 (SIF) 的提取

经典的 J 积分是线积分，理论上来说应该是与路径无关的，但由于数值积分的误差，观察到很多路径相关性。因此，通常选用面积分来代替线积分^[11, 24-25]。 J 积分定义为

$$J = - \int_{A_j} \left(W \delta_{ij} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (12)$$

式中： σ_{ij} 为应力； u_i 为第 i 个位移分量； x_j 为定义在裂纹尖端的局部坐标系； W 为应变能密度。

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (13)$$

q 表示定义在 A_j 上的足够光滑权函数，NMM 中 A_j 与 q 的构造如图 4 所示。面路径 A_j 由圆形线路径通过的流形元区域组成。如果流形元的节点在圆内部， q_i 定义为 1，否则为 0。 A_j 内任意点 x 上的函数 $q(x)$ 可由一个简单的插值表示为

$$q(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) q_i \quad (14)$$

式中： n 为含 x 点的流形单元的节点数； $N_i(x)$ 为该单元的形函数。

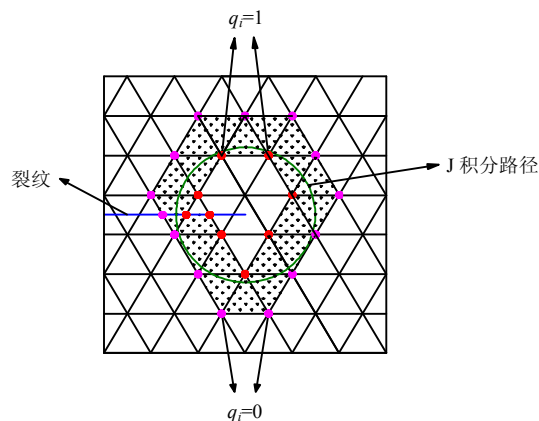


图 4 J 积分的面积路径以及 q 的定义

Fig.4 Area path of J integral and definition of q

对于纯 I 或 II 型，应力强度因子与 J 积分的关系为

$$J = \frac{K_I^2}{E'} \quad \text{或} \quad J = \frac{K_{II}^2}{E'} \quad (15)$$

$$\text{其中: } E' = \begin{cases} E & (\text{平面应力}) \\ \frac{E}{1-\nu^2} & (\text{平面应变}) \end{cases}.$$

对于混合型裂纹, 采用交互积分方法。采用裂纹体的两种状态来评估耦合区域的应力强度因子 K_I 和 K_{II} 。一个是真实状态, 场变量为: $(\sigma_{ij}^{(real)}, \varepsilon_{ij}^{(real)}, u_i^{(real)})$; 另外一个辅助状态, 场变量为 $(\sigma_{ij}^{(aux)}, \varepsilon_{ij}^{(aux)}, u_i^{(aux)})$ 。

应力强度因子计算中存在两种辅助状态 aux-I 和 aux-II:

aux-I: $K_I^{(aux)} = 1$, $K_{II}^{(aux)} = 0$, 当纯 I 型选为辅助状态时;

aux-II: $K_I^{(aux)} = 0$, $K_{II}^{(aux)} = 1$, 当纯 II 型选用辅助状态时。

辅助场的应力和位移可以统一写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}^{(aux)} &= \frac{K_I^{(aux)}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \\ &\quad \frac{K_{II}^{(aux)}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{22}^{(aux)} &= \frac{K_I^{(aux)}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \\ &\quad \frac{K_{II}^{(aux)}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{12}^{(aux)} &= \frac{K_I^{(aux)}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \\ &\quad \frac{K_{II}^{(aux)}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{12}^{(aux)} &= \sigma_{21}^{(aux)} \\ u_1^{(aux)} &= \frac{K_I^{(aux)}(1+\nu)\sqrt{r}}{E\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + \\ &\quad \frac{K_{II}^{(aux)}(1+\nu)\sqrt{r}}{E\sqrt{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 2 + \cos \theta) \\ u_2^{(aux)} &= \frac{K_I^{(aux)}(1+\nu)\sqrt{r}}{E\sqrt{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) - \\ &\quad \frac{K_{II}^{(aux)}(1+\nu)\sqrt{r}}{E\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 2 + \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中:

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & (\text{平面应力}) \\ 3-4\nu & (\text{平面应变}) \end{cases} \quad (17)$$

根据叠加原理以及线路径到面积路径的转换方法, 交互积分的面积分表达式为

$$I^{(real,aux)} = - \int_{A_j} \left[W^{(real,aux)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(real)} \frac{\partial u_i^{(aux)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(aux)} \frac{\partial u_i^{(real)}}{\partial x_1} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (18)$$

式中: $W^{(real,aux)}$ 为交互应变能。

$$W^{(real,aux)} = \sigma_{ij}^{(real)} \varepsilon_{ij}^{(aux)} = \sigma_{ij}^{(aux)} \varepsilon_{ij}^{(real)} \quad (19)$$

应力强度因子和交互积分之间的关系为

$$K_I = \frac{1}{2} E' I^{(real,aux-I)} \quad (20)$$

$$K_{II} = \frac{1}{2} E' I^{(real,aux-II)} \quad (21)$$

需要注意的是, 所有真实状态的变量都要转换到定义在裂纹尖端的局部坐标系下。

7 算 例

7.1 网格依赖性测试方法

(1) 网格密度对应力强度因子的影响: 对于高阶改进的 NMM, 需要测试不同网格密度对应力强度因子的影响。

(2) 裂纹尖端与数学网格相对位置对应力强度因子的影响: 裂纹扩展时, 裂纹与数学网格的相对位置关系将会呈现出各种不同的情况。对同一个裂纹, 通过旋转数学网格 (如图 5 所示), 来构造出各种不同的相对位置关系并测试其网格依赖性。数学覆盖的旋转范围为: $0^\circ \sim 162^\circ$, 以 18° 为间隔。旋转过程中, 构造了各种极端的情况, 比如裂纹尖端距离数学网格节点或者边非常地近。

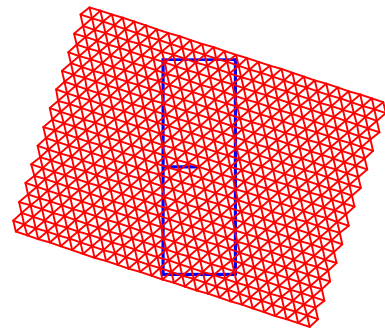


图 5 旋转数学覆盖

Fig.5 Rotation of the mathematical cover

7.2 单边裂纹受拉

如图 6 所示, 有限平板的宽 $W = 2.0 \text{ m}$, 高 $2H = 6 \text{ m}$, 裂纹长度 $a = 1 \text{ m}$ 。拉力 $\sigma = 1.0 \text{ N/m}^2$ 。

解析解^[26]为 $K_I = C\sigma\sqrt{a\pi}$, 其中 C 为修正系数,

反映了尺寸效应, 当 $a/W \leq 0.6$ 时,

$$C = 1.12 - 0.231 \left(\frac{a}{W} \right) + 10.55 \left(\frac{a}{W} \right)^2 - 21.72 \left(\frac{a}{W} \right)^3 + 30.39 \left(\frac{a}{W} \right)^4 \quad (22)$$

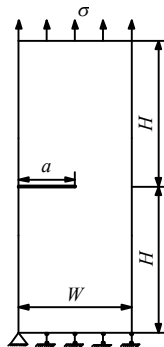


图6 含单边裂纹有限平板受拉

Fig.6 Finite plate with an edge crack under tension

7.2.1 网格密度的影响

如图7, 应力强度因子随着自由度的增加在波动, 波动范围仅为0.5%, 这表明对于高阶NMM来说, 网格密度对于应力强度因子的影响并不大。同样可见, 在很低的自由度(DOF)下, 已经达到了相当高的计算精度, 比0阶NMM计算结果要好得多, 收敛速度同样快得多^[18]。

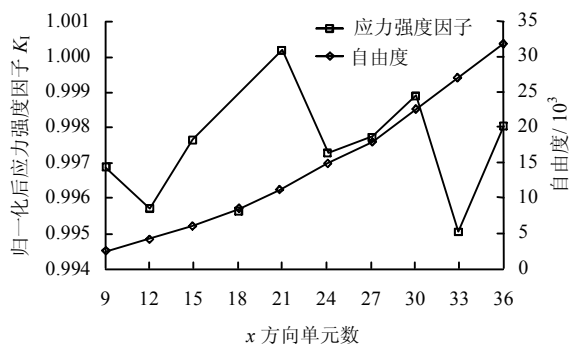


图7 归一化后的应力强度因子 K_I 随着网格密度的变化

Fig.7 The normalized SIF K_I with different mesh density

7.2.2 相对位置的影响

(1) 裂纹尖端在单元内部

如图8所示, 当裂纹尖端落在单元内部时, 旋转过程中, 构造各种不同的情况: a1、a4、a7和a10表示裂纹尖端在单元内部, 但既不很靠近节点也不很靠近边; a2、a5和a8表示裂纹尖端离边很近; a3、a6和a9表示裂纹尖端很靠近节点。

(2) 裂纹尖端落在单元边上

如图9所示, 当裂纹尖端落在单元边上时, 在旋转过程中, 同样构造各种不同的情况: b1、b3、b5、b7和b9表示裂纹尖端在单元边上, 但不是很靠近节点; b2、b4、b6、b8和b10表示裂纹尖端不仅在边上而且非常靠近节点。

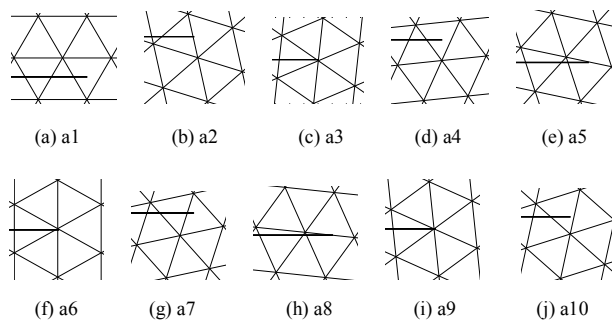


图8 裂纹尖端落在单元内部时所构造的各种不同情况

Fig.8 Different cases constructed during rotation when crack tip inside the element

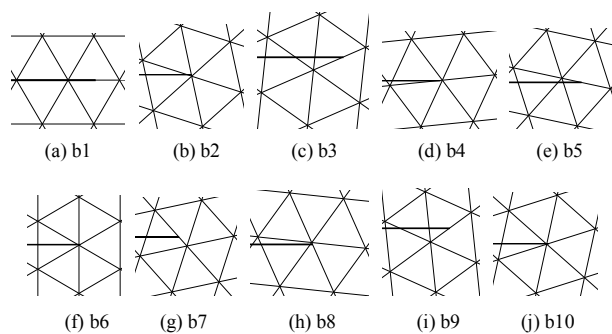


图9 裂纹尖端落在单元边上时所构造的各种不同情况

Fig.9 Different cases constructed during rotation when crack tip on the edge of the element

(3) 裂纹尖端落在单元的节点上

这种情况下, 裂纹尖端正好落在单元节点上, 旋转过程中无需构造其他情况。

如图10所示, 应力强度因子 K_I 非常接近解析解, 即便在各种极端情况下, 最大误差也仅在0.8%以内。波动的原因可能与边界条件、流形单元形状等有关, 是可接受的。

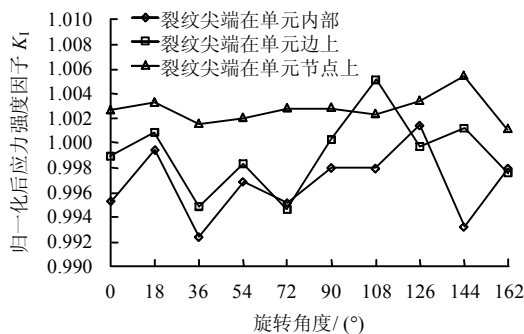


图 10 3 种情况下归一化后的应力强度因子 K_I
Fig.10 The normalized SIF K_I during the rotation
in the three cases

对于 3 种情况, 结果表示 (1) > (2) > (3), 这可能是由不同的奇异覆盖布置所引起, 意味着第 (2) 和 (3) 种情况下, 奇异性稍微加强了一些。结果同样表明了奇异覆盖布置的合理性。结果显示了非常小的网格依赖性。

7.3 受剪单边裂纹

如图 11 所示, 测试了混合模式下的应力强度因子 K_I 和 K_{II} 。矩形平板尺寸为: $W = 7.0 \text{ cm}$, $H = 8.0 \text{ cm}$, $a = 3.5 \text{ cm}$ 。底部边界固定, 顶部受剪力 $\tau = 1.0 \text{ N/cm}^2$ 。平面应变问题, 弹性模量和泊松比分别为: $E = 3 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$, $\nu = 0.25$ 。

据文献[27], 该问题的精确解为: $K_I = 34.0$, $K_{II} = 4.55$ 。

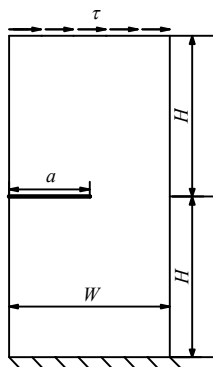


图 11 受剪力作用的含单边裂纹矩形平板 (混合模式)
Fig.11 Rectangular plate with an edge crack subjected
to shear force (mixed mode)

7.3.1 网格密度的影响

归一化后的应力强度因子 K_I 和 K_{II} 随着网格密度的变化, 如图 12 所示, 同样观测到了波动性, 但波动范围对二者来说同样在 0.8% 以内。可认为网格密度对应力强度因子的影响并不明显。

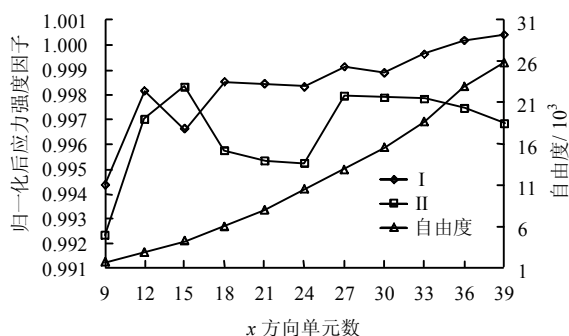


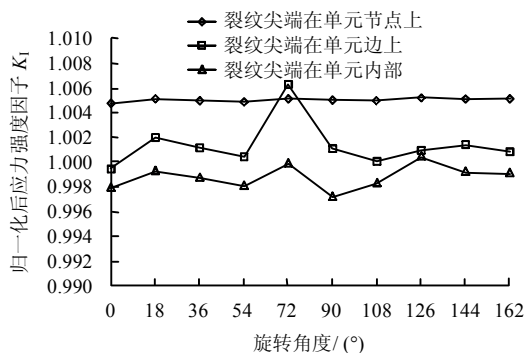
图 12 归一化后应力强度因子 K_I 和 K_{II} 随着网格密度变化

Fig.12 The normalized SIFs K_I and K_{II}
with different mesh density

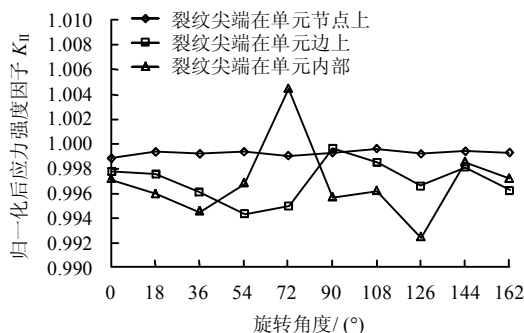
7.3.2 相对位置关系的影响

同 7.2 节所述, 在数学覆盖旋转过程中, 针对 3 种情况, 依然构造了各种不同的极端情况。

如图 13 所示, 混合型裂纹在数学覆盖旋转过程中的应力强度因子变化。对于第 (1) 种情况波动相对平缓, 而对于第 (2) 和 (3) 种情况, 波动稍微大一些。但相对误差仍只在 0.8% 以内。同样观测到了极小的网格依赖性。



(a) K_I



(b) K_{II}

图 13 3 种情况下, 旋转过程中归一化后 K_I 和 K_{II} 变化
Fig.13 The normalized SIF K_I and K_{II} during the rotation
in the three cases

7.4 受拉作用下孔边斜裂纹

如图 14 所示, 为一受拉作用的孔边斜裂纹。应力强度因子的精确解由文献[28]给出:

$$\left. \begin{aligned} K_I &= F_I \sigma \sqrt{\pi a} \\ K_{II} &= F_{II} \sigma \sqrt{\pi a} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

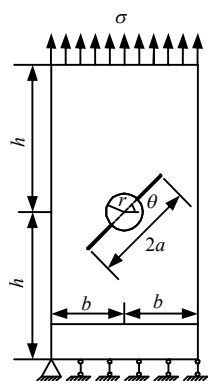


图 14 孔边斜裂纹

Fig.14 Circular hole with an oblique crack

当 $\frac{h}{b} = 2$, $\frac{r}{b} = 0.25$, $\theta = 45^\circ$, $\frac{a}{b} = 0.7$ 时,

$$F_I = 0.731, F_{II} = 0.584.$$

7.4.1 网格密度的影响

如图 15 所示,两个裂纹尖端的 K_I 或 K_{II} 表示出了相同的变化趋势。右侧裂纹尖端的结果稍好于左侧。随着自由度的增加, K_{II} 的变化较之 K_I 要更为平滑。虽然有些波动,但波动范围极小,依然表现出了很好的网格无关性。

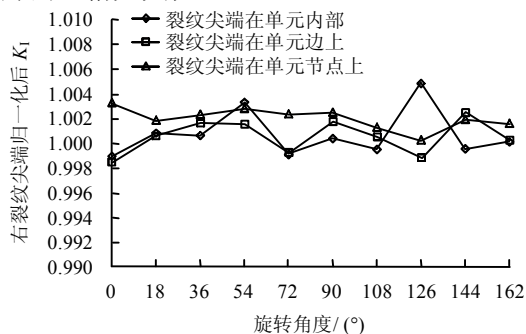
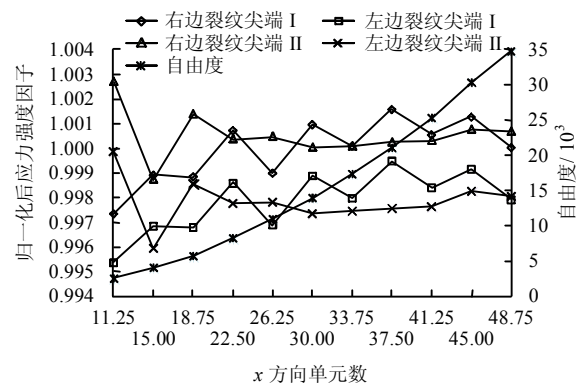
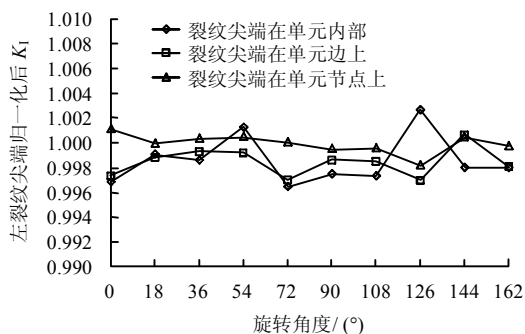
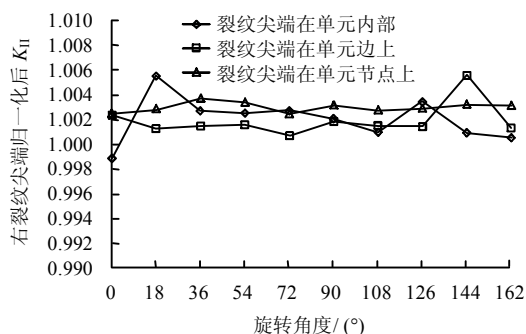
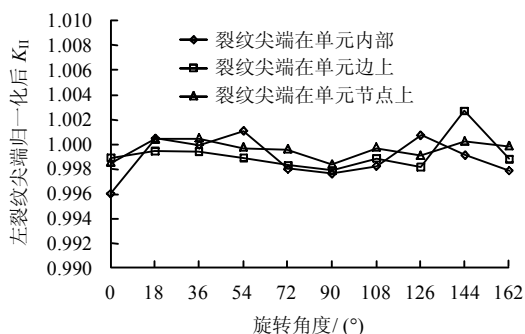
(a) 右裂纹尖端归一化后 K_I 

图 15 不同网格密度下归一化后的应力强度因子变化

Fig.15 The normalized SIFs corresponding to different mesh density

(b) 左裂纹尖端归一化后 K_I (c) 右裂纹尖端归一化后 K_{II} (d) 左裂纹尖端归一化后 K_{II} 图 16 3 种情况下, 旋转过程中归一化后 K_I 和 K_{II} 的变化Fig.16 The normalized SIFs K_I and K_{II} during the rotation of the two crack tips in the three cases

7.4.2 相对位置关系的影响

在此对右侧裂纹进行同 7.2.2 和 7.3.2 节的操作。相对位置关系对应力强度因子的影响如图 16 所示。

从图中可知, 相对误差仅在 0.6% 以内, 表明了

网格的无关性。

8 结 论

(1) 应用改进的高阶 NMM 来处理二维弹性裂

纹问题。与 0 阶相比, 1 阶位移覆盖函数即便在更低的自由度下也达到了同样高的计算精度。

(2) 同样对网格密度表现出了极小的依赖性,

当然网格密度首先要达到了某一合适的密度, 这个密度较之 0 阶不会太大。对同样的裂纹, 通过旋转数学覆盖, 构造出不同的裂纹与数学网格的相对位置关系, 测试了另外一种网格依赖性。结果显示了同样的网格无关性。研究表明, NMM 即使在处理强奇异性问题时依然有着很好的网格无关性, 进一步表明它在模拟裂纹扩展问题时的鲁棒性。因此, 对于裂纹扩展问题的模拟, NMM 将是一个很好的选择。

参考文献

- [1] TRADEGARD A, NILSSON F, OSTLUND S. FEM-remeshing technique applied to crack growth problems[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1998, 160(1-2): 115-131.
- [2] BOUCHAR PO, BAY F, CHASTEL Y. Numerical modeling of crack propagation: automatic remeshing and comparison of different criteria[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2003, 192(35-36): 3887-3908.
- [3] BELYTSCHKO T, KRONGAUZ Y, ORGAN D, et al. Meshless methods: an overview and recent developments[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1996, 139(1-4): 3-47.
- [4] RAO BN, RAHMAN S. An efficient meshless method for fracture analysis of cracks[J]. **Computational Mechanics**, 2000, 26(4): 398-408.
- [5] DUFLLOT M, NAUYEN-DANG H. A meshless method with enriched weight functions for fatigue crack growth [J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2004, 59(14): 1945-1961.
- [6] BELYTSCHKO T, LIU Y Y. Element free Galerkin methods[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1994, 37(2): 229-256.
- [7] STROUBOULIS T, BABUSKA I, COPPS K. The design and analysis of the generalized finite element method[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2000, 181(1-3): 43-69.
- [8] STROUBOULIS T, COPPS K, BABUSKA I. The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2000, 47(8): 1401-1417.
- [9] STROUBOULIS T, COPPS K. The generalized finite element method[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2001, 190(32-33): 4081-4193.
- [10] DAUX C, MOES N, DOLBOW J, et al. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2000, 48(12): 1741-1760.
- [11] MOES N, DOLBOW J, BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1999, 46: 131-150.
- [12] SUKUMAR N, PREVOST J H. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method part I: Computer implementation[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2003, 40(26): 7513-7537.
- [13] HUANG R, SUKUMAR N, PREVOST J H. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method part II: numerical applications[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2003, 40(26): 7539-7552.
- [14] MELENK JM, BABUSKA I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1996, 139(1-4): 289-314.
- [15] BABUSKA I, MELENK J M. The partition of unity method[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1997, 40(4): 727-758.
- [16] SHI GH. Manifold method of material analysis[C]// Transactions of 9th Army Conference on Applied Mathematics and Computing. Minneapolis: Minnesota, 1991, 57-76.
- [17] SHI GH. Modeling rock joints and blocks by manifold method[C]//Proceedings of the 33rd US Rock Mechanics Symposium. New Mexico: San Ta Fe, 1992, 639-648.
- [18] ZHANG H H, LI L X, AN X M, et al. Numerical analysis of 2-D crack propagation problems using the numerical manifold method[J]. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 2010, 34 (1): 41-50.
- [19] ZHANG H H, ZHANG S Q. Extract of stress intensity factors on honeycomb elements by the numerical manifold method[J]. **Finite Elements in Analysis and Design**, 2012, 59: 55-65.
- [20] MA G W, AN X M, ZHANG H H, et al. Modeling complex crack problems using the numerical manifold method[J]. **International Journal of Fracture**, 2009, 156(1): 21-35.
- [21] THOMAS-PETER FRIES, TED BELYTSCHKO. The extended/ generalized finite element method: An overview of the method and its applications[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2010, 84(3): 253-304.
- [22] TERADA KENJIRO, KURUMATANI MAO. Performance assessment of generalized elements in the finite cover method[J]. **Finite Elements in Analysis and Design**, 2004, 41(2): 111-132.
- [23] 王自强, 陈少华. 高等断裂力学[M]. 北京: 科学出版

社, 2009.

- [24] LI F Z, SHIH C F, NEEDLEMAN A. A comparison of methods for calculating energy release rates[J]. **Engineering Fracture Mechanics**, 1985, 21(2): 405—421.
- [25] BELYTSCHKO T, BLACK T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1999, 45(5): 601—620.
- [26] EWALDS H, WANHILL R. Fracture mechanics[M]. New York: Edward Arnold, 1989.
- [27] TADA H, PARIS P C, IRWIN G R. The stress analysis of crack handbook[M]. New York: ASME PRESS, 2000.
- [28] 中国航空研究院. 应力强度因子手册[M]. 北京: 科学出版社, 1993: 356—357.